

# 粒子系の古典論ノート

xiupos

2024年8月22日

粒子系<sup>\*1</sup>の古典論の基本事項を体系的にまとめる。

## 0.1 最小作用の原理

粒子系の古典論において、以下を原理として認める。

時間  $t$  に依存する一般化座標と呼ばれるパラメータ  $q^1(t), \dots, q^D(t)$  に対して、作用 action と呼ばれる汎関数  $S[q^i]$  が存在し<sup>a</sup>、物理現象において座標  $q^i$  は作用  $S[q^i]$  が最小となるような経路が選ばれる。

言いかえると、時間  $t_1$  から  $t_2$  の運動において、 $q^i(t) \mapsto q^i(t) + \delta q^i(t)$  (ただし両端固定  $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$ ) なる経路の微小変換に対し、作用が停留値を取る：

$$\delta S[q^i] \equiv S[q^i + \delta q^i] - S[q^i] = 0.$$

この古典的原理を最小作用の原理という。

<sup>a</sup> 正しくは  $S[q^1(t), \dots, q^D(t)]$  と書かれるべきであるが、配位空間に関する任意の列  $\{a^1, \dots, a^D\}$  は単に  $a^i$  と書かれることが多い。この添字  $i$  は添字集合  $\{a^i\}_{i=1}^D$  程度の意味であり、あまり気にはいけない。

系に対し適当な作用  $S[q^i]$ 、あるいは次節の Lagrangian を決定するのが、物理学の本質と言えよう。

### 0.1.1 例: 自由一次元一粒子系

質量  $m$  の自由一次元一粒子系の作用は

$$S[q] = \frac{m}{2} \frac{(q(t_2) - q(t_1))^2}{t_2 - t_1}$$

である。

### 0.1.2 例: 調和振動子

質量  $m$ 、角振動数  $\omega$  の調和振動子の作用は

$$S[q] = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_2 - t_1)} [(q(t_1)^2 + q(t_2)^2) \cos \omega(t_2 - t_1) - 2q(t_1)q(t_2)]$$

<sup>\*1</sup> ここでの「粒子系」は「(一般的な意味での)場でない」程度の意味である。厳密には粒子系も時間  $\mathbb{R}$  から配位空間  $\mathbb{R}^D$  への場  $q = (q^i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^D$  であるから、場の理論の特別な場合とも言える。

である. 上の例とあわせて, これらが  $\delta S[q^i] = 0$  を満たすことは明らかである.

## 0.2 Euler-Lagrange の運動方程式

系の作用を直接求めることは難しく, これから定義する Lagrangian を用いるのが便利である.

作用は, 座標と時間に関する **Lagrangian**  $L(q^i, \dot{q}^i, t)$  を用いて,

$$S[q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t).$$

と表される.

最小作用の原理に対し, この Lagrangian が満たすべき条件を求めよう.  $q^i \mapsto q^i + \delta q^i$  の変換に対し, 作用の変化  $\delta S[q^i] = S[q^i + \delta q^i] - S[q^i]$  を計算すると,

$$\begin{aligned} \delta S[q^i] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ L\left(q^i + \delta q^i, \dot{q}^i + \frac{d\delta q^i}{dt}, t\right) - L(q^i, \dot{q}^i, t) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{d\delta q^i}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} - \delta q^i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) + \frac{d}{dt} \left( \delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q^i \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] + \left[ \delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \end{aligned}$$

となる. ここで, 第2項は両端固定の境界条件  $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$  より消すことができ,

$$\delta S[q^i] = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta q^i \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right]$$

となる.  $\delta q^i(t)$  は  $t_1 < t < t_2$  で任意だから, 原理  $\delta S[q^i] = 0$  より, 次の運動方程式が得られる.

最小作用の原理を満たすとき, Lagrangian  $L(q^i, \dot{q}^i, t)$  は **Euler-Lagrange** の運動方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0$$

を満たす.

これにより, 変分条件  $\delta S[q^i] = 0$  を満たす  $q^i(t)$  を求める問題は, Euler-Lagrange 方程式という微分方程式を解く問題と等価であることがわかった.

ところで, Lagrangian は一意ではない. Lagrangian  $L(q, \dot{q}, t)$  に対し, 位置と時間の関数  $f(q, t)$  の時間に関する完全微分  $df(q, t) / dt$  を加えた量

$$\begin{aligned} \tilde{L}(q, \dot{q}, t) &:= L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt} \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \dot{q}^j \frac{\partial f(q, t)}{\partial q^j} + \frac{\partial f(q, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

は同じ形の Euler-Lagrange の運動方程式を与える。実際、

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} + \dot{q}^j \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^i \partial t},$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) + \dot{q}^j \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^i} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^i}$$

であるから、辺々引いて、

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right)$$

となり、 $L$  について Euler-Lagrange 方程式が成立するなら、 $\tilde{L}$  についても成立する。

### 0.2.1 例: 一次元一粒子系

一次元一粒子系の Lagrangian は

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

で与えられる。ただし  $V(q)$  は系のポテンシャルである。ここで、

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} = m\ddot{q}$$

であるから、Euler-Lagrange の運動方程式は、

$$m\ddot{q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

と求まる。これは Newton の運動方程式として知られており、Lagrangian 決定の任意性を除けば、最小作用の原理は物理原理として well-defined であることがわかる。

ポテンシャルが無い ( $V = 0$ ) ときの作用の表式を求める。運動方程式  $m\ddot{q} = 0$  を解いて、

$$\dot{q}(t) = \frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

が得られる。したがって、作用は

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \frac{(q(t_2) - q(t_1))^2}{(t_1 - t_2)^2} = \frac{m}{2} \frac{(q(t_2) - q(t_1))^2}{t_2 - t_1}$$

と求まる。

### 0.2.2 例: 調和振動子

調和振動子の Lagrangian は、

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2.$$

で与えられる。ここで、

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -m\omega^2 q, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} = m\ddot{q}$$

であるから、Euler-Lagrange の運動方程式は

$$m\ddot{q} + m\omega^2 q = 0$$

と求まる.

作用の表式を求める. 運動方程式を解いて,

$$q(t) = \frac{q_1 \sin \omega(t - t_2) - q_2 \sin \omega(t - t_1)}{\sin \omega(t_1 - t_2)},$$

$$\dot{q}(t) = \omega \frac{q_1 \cos \omega(t - t_2) - q_2 \cos \omega(t - t_1)}{\sin \omega(t_1 - t_2)}$$

が得られる. ただし,  $q_1 \equiv q(t_1)$ ,  $q_2 \equiv q(t_2)$  とした. したがって, 作用は,

$$\begin{aligned} S[q] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m}{2} \left[ \left\{ \omega \frac{q_1 \cos \omega(t - t_2) - q_2 \cos \omega(t - t_1)}{\sin \omega(t_1 - t_2)} \right\}^2 - \omega^2 \left\{ \frac{q_1 \sin \omega(t - t_2) - q_2 \sin \omega(t - t_1)}{\sin \omega(t_1 - t_2)} \right\}^2 \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{m\omega^2}{2} \frac{q_1^2 \cos 2\omega(t - t_2) + q_2^2 \cos 2\omega(t - t_1) - 2q_1 q_2 \cos(2t - t_1 - t_2)}{\sin^2 \omega(t_2 - t_1)} \\ &= \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_2 - t_1)} [(q_1^2 + q_2^2) \cos \omega(t_2 - t_1) - 2q_1 q_2] \end{aligned}$$

と求まる.

### 0.3 Noether の定理

Lagrangian は運動方程式を与えるだけでなく, 系の対称性に関する情報も持っている. 時間と座標の連続変換に対し作用が不変であるとき, 系には対応する不変量が存在することが知られている. この定理は Noether の定理と呼ばれている.

時間の微小変換  $t \mapsto t' = t + \delta t$  に対し, 座標が  $q^i(t) \mapsto q'^i(t') = q^i(t) + \delta q^i(t)$  と変換されるとする. このとき  $t_1 < t < t_2$  の作用の変化  $\delta S[q^i(t)] = S[q'^i(t')] - S[q^i(t)]$  を計算すると,

$$\begin{aligned} \delta S[q^i] &= \int_{t_1 + \delta t(t_1)}^{t_2 + \delta t(t_2)} dt' L(q'^i(t'), \partial'_t q'^i(t'), t') - \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) \\ &\quad \left( dt' = \frac{dt'}{dt} dt = (1 + \delta t) dt \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ (1 + \delta t) L(q'^i(t'), \partial'_t q'^i(t'), t') - L(q^i(t), \dot{q}^i(t), t) \right] \\ &\quad \left( \partial'_t q'^i(t') = \frac{dt}{dt'} \partial_t (q^i(t) + \delta q^i(t)) = (1 - \delta t)(\dot{q}^i + \delta \dot{q}^i) = \dot{q}^i + \delta \dot{q}^i - \dot{q}^i \delta t \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \delta t L + L(q^i + \delta q^i, \dot{q}^i + \delta \dot{q}^i - \dot{q}^i \delta t, t + \delta t) - L(q^i, \dot{q}^i, t) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \delta t L + \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + (\delta \dot{q}^i - \dot{q}^i \delta t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t \frac{\partial L}{\partial t} \right] \\ &\quad (\text{Lie 微分 } \delta^L q^i(t) \equiv q'^i(t) - q^i(t) = \delta q^i - \dot{q}^i \delta t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \delta t L + (\delta^L q^i + \dot{q}^i \delta t) \frac{\partial L}{\partial q^i} + (\partial_t \delta^L q^i + \dot{q}^i \delta t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t \frac{\partial L}{\partial t} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta^L q^i \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] + \frac{d}{dt} \left( \delta^L q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t L \right) \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta^L q^i \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] + \left[ \delta^L q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta t L \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta^L q^i \left[ \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] + \left[ \delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta t \left( \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \right) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \end{aligned}$$

となる。ここで、最後の式の第一項は Euler-Lagrange の運動方程式より消え、第二項の  $t_1, t_2$  は任意である\*2。したがって、この変換に対し作用が不変  $\delta S = 0$  であるとすると、対応する保存量が得られる。

時間の微小変換  $t \mapsto t' = t + \delta t$  に対し、座標が  $q^i(t) \mapsto q^i(t') = q^i(t) + \delta q^i(t)$  と変換されるとき、作用が不変であるならば、量

$$\delta Q \equiv \delta q^i p_i - \delta t H \equiv \delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \delta t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L \right)$$

は保存する(**Noether** の定理 Noether's theorem):

$$\frac{d\delta Q}{dt} = 0, \quad (\Leftrightarrow \delta Q = \text{const.})$$

ここで、量

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \quad H \equiv \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L = \dot{q}^i p_i - L$$

はそれぞれ一般化運動量, Hamiltonian と呼ばれる(後述)。

### 0.3.1 例: 空間並進に対する不変量

空間並進  $t \mapsto t' = t, q^i(t) \mapsto q^i(t') = q^i(t) + \varepsilon^i$  に対し、作用が不変であるとき、一般化運動量は保存する:

$$\delta Q = \varepsilon^i p_i = \text{const.} \quad \therefore p_i = \text{const.}$$

### 0.3.2 例: 時間並進に対する不変量

時間並進  $t \mapsto t' = t + \varepsilon, q^i(t) \mapsto q^i(t') = q^i(t)$  に対し、作用が不変であるとき、Hamiltonian は保存する:

$$\delta Q = -\varepsilon H = \text{const.} \quad \therefore H = \text{const.}$$

### 0.3.3 例: 空間回転に対する不変量

3次元空間での一粒子を考える。正規直交座標系  $q = \mathbf{x}$  を取り、空間回転  $t \mapsto t' = t, \mathbf{x}(t) \mapsto \mathbf{x}'(t') = R(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{x}(t)$  に対し、作用が不変であるとき、対応する保存量  $\mathbf{L}$  は角運動量と呼ばれる:

$$\delta Q = (-\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p} = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{p}) = \text{const.}$$

$$\therefore \mathbf{L} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{p} = \text{const.}$$

## 0.4 Hamilton-Jacobi 方程式

前節で導入された Hamiltonian は、Lagrangian を Legendre 変換したものであり、系に関して

\*2 最小作用の原理の場合と違い、このときの  $\delta q^i$  は両端固定でない。そのため、Euler-Lagrange の運動方程式の際に消えた発散項を、今回の場合は消すことができない。

Lagrangian と同程度の情報を持つ。以降, Hamiltonian の性質について詳しくみていく\*3.

Lagrangian  $L$  が与えられたとき,  $q^i$  に対して

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$$

を一般化運動量, または  $q^i$  に共役な運動量 conjugate momentum といい, 一般化座標とそれに共役な運動量の組  $(q^i, p_i)$  を正準変数 canonical variables という。

Lagrangian  $L$  と正準変数  $(q^i, p_i)$  が与えられたとき<sup>a</sup>,

$$H(q^i, p_i, t) \equiv \dot{q}^i p_i - L$$

を **Hamiltonian** という。

<sup>a</sup> たとえば  $p_i = \partial L(q^i, \dot{q}^i, t) / \partial \dot{q}^i$  を逆に解いて  $p_i = \dot{q}_i = (q_i, p_i, t)$  が得られたとき。

一般化運動量と Hamiltonian は作用を端点で偏微分して

$$p_i(t) = \frac{\partial S}{\partial q^i(t)}, \quad H(q^i, p_i, t) = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

と得ることもできる。ただし作用は  $S[q^i] = \int_{t_0}^t dt' L(q^i, \dot{q}^i, t')$  で与えられている。実際, Noether の定理と同じ状況での変分は

$$\delta S[q^i] = [\delta q^i p_i - \delta t H]_{t'=t_0}^{t'=t}$$

である。このときの始点での変位を  $\delta t(t_0) = \delta q^i(t_0) = 0$  とすれば,

$$\delta S[q^i] = \delta q^i p_i - \delta t H$$

となる。この変分は経路の始点と途中  $t' \in [t_0, t)$  によらない形になっているから, 一点  $t$  での変位から求めたい全微分

$$dS = dq^i p_i - dt H$$

が得られる。

これらの性質を組み合わせることで以下の方程式が得られる。

最小作用の原理を満たす作用  $S[q^i] = \int_{t_0}^t dt' L(q^i, \dot{q}^i, t')$  に対し, 作用の端点  $t, q(t)$  での偏微分は **Hamilton–Jacobi** 方程式 Hamilton–Jacobi equation

$$H\left(q^i(t), \frac{\partial S}{\partial q^i(t)}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

を満たす。

\*3 Lagrangian を用いた議論を「Lagrange 形式」, Hamiltonian を用いた議論を「Hamilton 形式」と呼ぶことがある。

## 0.5 Hamilton の運動方程式

Lagrangian の場合と同様に, 最小作用の原理に対し Hamiltonian が満たす条件を求めよう. Hamiltonian  $H(q^i, p_i, t) \equiv \dot{q}^i p_i - L$  の全微分は,

$$\begin{aligned} dH &= \dot{q}^i dp_i + p_i dq^i - dL \\ &= \dot{q}^i dp_i + p_i dq^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - p_i d\dot{q}^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &\quad \left( \because dL = \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned}$$

である. ここで, Euler-Lagrangian 方程式が成立するとき  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$  であることを用いると, Hamiltonian に関する運動方程式が得られる.

最小作用の原理を満たすとき, Hamiltonian は以下の **Hamilton** の運動方程式あるいは正準方程式 canonical equation

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

を満たす.

Lagrangian が時間に陽に依存しないとき, Hamiltonian

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

は保存する. 時間並進に対して作用が不変であるから, 前述の Noether の定理の結果とも一致する.  $q^i(t)$  と  $p_i(t)$  を独立にした作用

$$S[q^i, p_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt [\dot{q}^i(t) p_i(t) - H(q^i(t), p_i(t), t)]$$

も用いられる. このときの最小作用の原理は

$$\delta S[q^i, p_i] = S[q^i + \delta q^i, p_i + \delta p_i] - S[q^i, p_i] = 0$$

で表される.

### 0.5.1 例: 一次元一粒子系

一次元一粒子系の Lagrangian は,

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

であった. 一般化運動量の定義より,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

である。したがって  $\dot{q} = p/m$  であるから、Hamiltonian の定義より、

$$H(q, p, t) = \frac{p}{m}p - L\left(q, \frac{p}{m}, t\right) = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

と求まる。ここで、

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{dV}{dq}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

であるから、Hamilton の運動方程式は、

$$\dot{p} = -\frac{dV}{dq}, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

と得られる。

### 0.5.2 例: 調和振動子

調和振動子の Lagrangian は、

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

であった。一般化運動量の定義より、

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

である。したがって  $\dot{q} = p/m$  であるから、Hamiltonian の定義より、

$$H(q, p, t) = \frac{p}{m}p - L\left(q, \frac{p}{m}, t\right) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

と求まる。ここで、

$$\frac{\partial H}{\partial q} = m\omega^2q, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

であるから、Hamilton の運動方程式は、

$$\dot{p} = -m\omega^2q, \quad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

と得られる。

## 0.6 正準変換

正準変数の変換  $(q^i, p_i) \mapsto (q'^j, p'_j) = (q'^j(q^i, p_i), p'_j(q^i, p_i))$  に対して Hamiltonian が  $H(q^i, p_i, t) \mapsto H'(q'^j, p'_j, t)$  と変換される時、この正準変数の変換を 正準変換 canonical transformation という。いずれの表示でも最小作用の原理を満たすとき、Hamiltonian の定義から、

$$\delta S[q^i, p_i] = \delta \int dt (\dot{q}^i p_i - H) = 0,$$

$$\delta S'[q'^i, p'_i] = \delta \int dt (\dot{q}'^i p'_i - H') = 0.$$

したがって、ある関数  $W$  が存在して、

$$\begin{aligned} (\dot{q}^i p_i - H) - (\dot{q}'^i p'_i - H') &= \frac{dW}{dt}. \\ \therefore dW &= p_i dq^i - p'_i dq'^i - (H - H') dt. \end{aligned}$$



または、両辺に  $d(q^i p'_i) / dt$  を足して、

$$\begin{aligned} (\dot{q}^i p_i - H) - (-q'^i \dot{p}'_i - H') &= \frac{d}{dt}(W + q'^i p'_i) =: \frac{dW'}{dt}. \\ \therefore dW' &= p_i dq^i + q'^i dp'_i - (H - H') dt. \end{aligned}$$

これら  $W(q^i, q'^i, t)$ ,  $W'(q^i, p'_i, t)$  をどちらも母関数といい、以下を満たす。

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W}{\partial q^i}, & p'_i &= -\frac{\partial W}{\partial q'^i}, & H' &= H + \frac{\partial W}{\partial t}, \\ p_i &= \frac{\partial W'}{\partial q^i}, & q'^i &= \frac{\partial W'}{\partial p'_i}, & H' &= H + \frac{\partial W'}{\partial t}. \end{aligned}$$

## 0.7 Poisson 括弧

正準変数  $(q^i, p_i)$  に対し、**Poisson 括弧** Poisson bracket は以下で定義される演算である：

$$\{A, B\}_P \equiv \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial q^i} \frac{\partial A}{\partial p_i}.$$

正準変数自身は以下を満たす：

$$\{q^i, p_j\}_P = \delta_j^i, \quad \{q^i, q^j\}_P = \{p_i, p_j\}_P = 0.$$

また、Hamilton の運動方程式は以下のように書き換えられる：

$$\frac{dq^i}{dt} = \{q^i, H\}_P, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{p_i, H\}_P.$$

より一般に、正準変数と時間に関する物理量  $A(q^i, p_i, t)$  について、時間微分に関して以下が成立する：

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}_P + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

実際、 $A$  の時間による完全微分は、

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\}_P + \frac{\partial A}{\partial t}. \end{aligned}$$

この式は、物理量  $A$  の全時間発展が Hamiltonian  $H$  によって記述されることを意味している。

## 0.8 参考文献

- ランダウ, L., リフシッツ, E. 『力学』 (広重徹, 水戸巖訳, 東京図書, 2008)
- 井田大輔 『現代解析力学入門』 (朝倉書店, 2020)
- 高橋康, 柏太郎 『量子場を学ぶための場の解析力学入門増補第2版』 (講談社サイエンティフィック, 2005)
- 柏太郎 『新版演習場の量子論』 (サイエンス社, 2006)